ЧАСТЬ I
АФФИННОЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Глава 1
Основные аффинные понятия

§ 1. Аффинное пространство

1.1. **ТОЧКИ И ВЕКТОРЫ**. Геометрия впервые была аксиоматезирована Евклидом, в ее основу Евклид положил понятия точки, прямой и плоскости; их основные свойства описаны аксиомами. Системы аксиом геометрии со временем менялись. В настоящее время общепринята векторная аксиоматика, и основными понятиями геометрии теперь являются точка и вектор. Точка никак не определяется. Рассматривается некоторое непустое множество $\mathbf{W}$, его элементы называются *точками* и обозначаются: $A, B, \ldots, M, \ldots$. Под *векторами* понимаются элементы *линейного пространства*, часто, но не всегда, со скалярным произведением. Векторы могут иметь различную природу, но важны их свойства, которые описываются аксиомами линейного пространства и аксиомами скалярного произведения векторов, т.е. важны свойства векторов относительно операций над ними. Между точками и векторами устанавливается зависимость, описываемая *векторной аксиоматикой – аксиоматикой Г.Вейля*. *Скалярное произведение векторов* задает *метрические свойства* пространства, состоящего из точек, геометрия которого изучается с помощью векторов. Векторы обозначаются $\vec{o}, \vec{a}, \vec{b}, \ldots$, линейное пространство обозначается $\mathbf{L}$, векторное пространство, т.е. линейное пространство со скалярным произведением, обозначается $\mathbf{V}$. Множество точек $\mathbf{W}$ с некоторыми свойствами, обусловленными векторами, называется *пространством*. Свойства пространства изучает геометрия. Линейное (соответственно векторное) пространство, определяющее геометрию пространства $\mathbf{W}$, называется *линейным* (*векторным*) *пространством пространства точек* $\mathbf{W}$. Размерностью пространства $\mathbf{W}$ называется размерность его линейного (векторного) пространства $\mathbf{L}$. Рассматриваем пространства размерности $n, n \geq 3$. Основой всех пространств с векторной аксиоматикой является пространство точек с линейным пространством, т.е. с пространством, для которого не определено скалярное произведение векторов, и, следовательно, не введены метрические понятия. Такое пространство называется *аффинным*, его обозначение $\mathbf{A}$ или $\mathbf{A}^n$, n - размерность, линейное пространство аффинного про-

странства обозначается $\mathbf{L}^n$. Прямые, плоскости и вообще, k-плоскости аффинного пространства (k-мерные подпространства) остаются прямыми, плоскостями, k-плоскостями всякого пространства после введения метрики.

1.2. **ВЕКТОРНАЯ АКСИОМАТИКА**. Заданы: множество точек $\mathbf{A}$ и линейное пространство $\mathbf{L}^n$ над полем $\mathbf{\Pi}$. Поле $\mathbf{\Pi}$ может быть любым, мы рассматриваем поле $\mathbf{R}$ действительных чисел. Также задано отображение

$$\lambda:\ \mathbf{A}\times\mathbf{A}\to\mathbf{L}^n$$

пар точек в линейное пространство $\mathbf{L}^n$, т.е.

всякой упорядоченной паре (A,B) *точек соответствует единственный вектор* $\vec{v}$, пишем: $AB=\vec{v}$;

отображение λ удовлетворяет аксиомам Г.Вейля:

(в.1) *для всякой точки* A *и всякого вектора* $\vec{v}$ *существует единственная точка* B, *что* $AB=\vec{v}$;

(в.2) *для любых трех точек* A,B,C, *если* $AB=\vec{v}$, $AC=\vec{u}$, *то* $AC=\vec{v}+\vec{u}$.

Множество $\mathbf{A}$ называется *аффинным пространством*; векторы из $\mathbf{L}^n$ называются *векторами аффинного пространства* $\mathbf{A}$. Справедливо

1.2.1.СВОЙСТВО. *Для любых трех точек* A,B,C:

$$AB+BC=AC;\ \textit{если}\ AB=\vec{v},\ \textit{то}\ BA=-\vec{v};\quad AA=\vec{o}.$$

Различные варианты векторной аксиоматики геометрии можно найти в [1 - 4]. Г. Вейль впервые опубликовал свою аксиоматику в 1918 году в книге «Пространство, время, материя» – это его лекции по общей теории относительности А. Эйнштейна, [5].

1.3. **ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО**. Множество $\mathbf{L}$, элементы которого называются *векторами*, называется *линейным пространством над полем* $\mathbf{R}$, если определены *линейные операции*

(а) *сложения векторов* и

(б) *умножения векторов на числа*,

удовлетворяющие аксиомам:

(L.1) $\vec{a}+\vec{b}$ вектор;

(L.2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

(L.3) существует нулевой вектор $\vec{o}$: $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ для всех векторов $\vec{a}$;

(L.4) для всякого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор $-\vec{a}$, $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$;

(L.5) $\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$;

(L.6) $t\vec{a}$ вектор, $t\in\mathbf{R}$;

(L.7) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$, $0\vec{a}=\vec{o}$;

(L.8) $(t+s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$;
(L.9) $t(\vec{a}+\vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$;
(L.10) $s(t\vec{a}) = (st)\vec{a}$.

Операция $+$ сложения векторов является *внутренней*; операция умножения векторов на числа является *внешней*, ее обозначение $\omega_R(+)$, в котором учитывается, что свойства внешней операции связаны со свойствами внутренней операции. Обозначение линейного пространства: $\mathbf{L} = (\mathbf{L}, +, \omega_R(+))$. Относительно внутренней операции линейное пространство является абелевой, т.е. коммутативной группой, таким образом, $(\mathbf{L}, +)$ – абелева группа. (Аксиомы (L.1) – (L.5) определяют группу.)

Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ векторы, $t_1, t_2, ..., t_m$ числа. Применяем линейные операции:

$$t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + ... + t_m\vec{a}_m,$$

результатом операций является вектор, обозначим его:

$$t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + ... + t_m\vec{a}_m = \vec{b}.$$

Вектор $\vec{b}$ называется *линейной комбинацией* данного множества векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$, числа $t_1, t_2, ..., t_m$ называются *коэффициентами* линейной комбинации. Если $\vec{b} = \vec{o}$ и существуют коэффициенты t_i, $i = 1,2,...,m$, отличные от нуля, то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}$ называются *линейно зависимыми*. Если из равенства $\vec{b} = \vec{o}$ следует $t_i = 0$ для всех i, то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}$ называются *линейно независимыми*.

Возможно, что для линейного пространства $\mathbf{L}$ выполняются еще аксиомы размерности:
(L.11) *в линейном пространстве существует n линейно независимых векторов*;
(L.12) *всякие $n+1$ векторов линейного пространства являются линейно зависимыми*.
В этом случае линейное пространство $\mathbf{L}$ называется *n-мерным* и обозначается $\mathbf{L}^n$. Число n называется *размерностью* линейного пространства.

1.4. **КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ**. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ n – мерные линейно независимые векторы, $\vec{a}$ произвольный вектор. Множество $n+1$ векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n, \vec{a}$ является линейно зависимым, значит, имеется линейная комбинация $t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + ... + t_n\vec{e}_n + t\vec{a} = \vec{o}$, в которой $t \neq 0$; получаем разложение

$$\vec{a} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + ...x^n\vec{e}_n,$$

коэффициенты которого определяются однозначно. Упорядоченное множество векторов

$$\mathbf{Б} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$$

называется *базисом* линейного пространства $\mathbf{L}^n$, числа кортежа $(x^1, x^2, ..., x^n)$ называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе **Б**, обозначение координат вектора

$$\vec{a} = (x^1, x^2, ..., x^n).$$

Координаты векторов базиса:

$$\vec{e}_1 = (1,0,...,0), \vec{e}_2 = (0,1,...,0), \ldots, \vec{e}_n = (0,0,...,1).$$

Линейные операции над векторами в координатах таковы:

$$(x^1, x^2, ..., x^n) + (y^1, y^2, ..., y^n) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, ..., x^n + y^n);$$

$$t(x^1, x^2, ..., x^n) = (x^1 t, x^2 t, ..., x^n t), \ t \in \mathbf{R}.$$

Линейное пространство $\mathbf{L}^n$ обладает бесконечным множеством базисов. Пусть $\text{Б}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n')$ еще один базис. Обозначим координаты векторов $\vec{e}_j'$, $j = 1,2,...,n$, в базисе **Б**:

$$\vec{e}_j' = (c_j^1, c_j^2, ..., c_j^n) = (c_j^i), \ i = 1,2,...,n.$$

Запишем координаты векторов $\vec{e}_j'$ в виде столбцов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & ... & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & ... & c_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ c_1^n & c_2^n & ... & c_n^n \end{pmatrix}.$$

Это матрица перехода от базиса **Б** к базису $\text{Б}'$, матрица замены базиса. Векторы базиса $\text{Б}'$ линейно независимы, поэтому $\det C \neq 0$. Обозначим координаты вектора $\vec{a}$ в базисе **Б**: $\vec{a} = (x^1, x^2, ..., x^n)$ и в базисе $\text{Б}'$: $\vec{a} = (x'^1, x'^2, ..., x'^n)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ ... \\ x'^n \end{pmatrix}.$$

Это формулы замены координат векторов при переходе от базиса **Б** к базису $\text{Б}'$. Обратной замене соответствует равенство

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ ... \\ x'^n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix}.$$

1.5. **ПОДПРОСТРАНСТВА, ОБОЛОЧКИ**. Подмножество $\mathbf{L}_1$ векторов из $\mathbf{L}$ называется *подпространством* линейного пространства $\mathbf{L}$, если относительно операций на $\mathbf{L}$ подмножество $\mathbf{L}_1$ является линейным пространством. Обозначение $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}$ указывает, что $\mathbf{L}_1$ есть подпространство пространства $\mathbf{L}$. Если $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{L}_1$, то $\vec{a} + \vec{b} \in \mathbf{L}_1$ и $t\vec{a} \in \mathbf{L}_1$, $t \in \mathbf{R}$. Для векторов

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ из $\mathbf{L}_1$ также вектор $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + ... + t_m\vec{a}_m = \vec{b}$ содержится в $\mathbf{L}_1$. Нулевое подпространство состоит из нулевого вектора $\vec{o}$.

Тривиальными подпространствами всякого линейного пространства являются: нулевое пространство и само пространство.

Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ фиксированы в $\mathbf{L}$, $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + ... + t_m\vec{a}_m$ всевозможные линейные комбинации данных векторов. Множество указанных линейных комбинаций является подпространством линейного пространства $\mathbf{L}$, оно называется *оболочкой* или *линейной оболочкой векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$; обозначение оболочки векторов

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m \rangle .$$

Размерность оболочки не превосходит m; если данные векторы линейно независимы, то размерность их оболочки равна m.

Всякий ненулевой вектор $\vec{a}$ порождает 1-мерную оболочку. Имеем:

$$\langle \vec{a} \rangle = \{ t\vec{a} \mid t \in \mathbf{R} \},$$

т.е. оболочка $\langle \vec{a} \rangle$ вектора $\vec{a}$ состоит из векторов $t\vec{a}$ для всех $t \in \mathbf{R}$; затем

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \{ u\vec{a} + v\vec{b} \mid (u, v) \in \mathbf{R}^2 \},$$

$\vec{a}, \vec{b}$ линейно независимы; и так далее. Для любого ненулевого вектора $\vec{c} \in \langle \vec{a} \rangle$ выполняется

$$\langle \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \rangle \ ;$$

для любых линейно независимых векторов $\vec{c}, \vec{d}$ из $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ верно

$$\langle \vec{c}, \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle .$$

Если $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ подпространства линейного пространства $\mathbf{L}$, то $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ и $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$ подпространства линейного пространства $\mathbf{L}$. Если $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{\vec{o}\}$, то $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ – прямая сумма подпространств. Всякий вектор $\vec{c}$ из $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ однозначно записывается в виде $\vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{a} \in \mathbf{L}_1$, $\vec{b} \in \mathbf{L}_2$.

Подпространство $\mathbf{L}_1$ пространства $\mathbf{L}$ является подгруппой в $(\mathbf{L},+)$. Множества векторов $\vec{x} + \mathbf{L}_1$ – смежные классы группы $(\mathbf{L},+)$ по подгруппе $\mathbf{L}_1$, называются *линейными многообразиями* линейного пространства $\mathbf{L}$.

1.6. КООРДИНАТЫ ТОЧЕК. Множество, состоящее из точки аффинного пространства $\mathbf{A}^n$ и базиса его линейного пространства $\mathbf{L}^n$, называется *репером* аффинного пространства $\mathbf{A}^n$. Точку обозначаем O и называем *началом* репера, базис – $\mathbf{Б} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, тогда репер есть

$$\mathbf{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n) .$$

Согласно аксиоматике Г. Вейля, п. 1.2, паре точек (O, M) соответствует единственный вектор $\vec{m}$. Точка O и вектор $\vec{m}$ определяют единственную

точку M. Пусть $\vec{m}=(x^1,x^2,...,x^n)$ в базисе **Б**, $OM=\vec{m}$. *Координатами* точки M в репере **В** называются координаты вектора OM в базисе **Б**. Обозначение координат точек:

$$M\ (x^1,x^2,...,x^n) \text{ или } M=(x^1,x^2,...,x^n).$$

Если $A=(a^1,a^2,...,a^n)$ и $B=(b^1,b^2,...,b^n)$ две точки аффинного пространства, то на основании векторного равенства

$$AB=AO+OB=-OA+OB$$

и операций над векторами получаем

$$AB=(b^1-a^1,b^2-a^2,...,b^n-a^n).$$

Зная, как заменяются координаты векторов при переходе от одного базиса к другому, п. 1.4, можно получить формулы замены координат точек при переходе от одного репера к другому. Если в репере **В**: $M=(x^1,x^2,...,x^n)$ и в репере **В′**: $M=(x^1,x^2,...,x^n)$, то

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ ... \\ x'^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ ... \\ b^n \end{pmatrix},$$

где C матрица замены базиса, $O'=(b^1,b^2,...,b^n)$ координаты в репере **В** начала O' репера **В′**.

§ *2. Прямые и плоскости.*

2.1. **ПРЯМЫЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА**. Прямая аффинного пространства определяется точкой и ненулевым вектором. Пусть A точка и $\vec{m}$ ненулевой вектор аффинного пространства. Они задают прямую, которая обозначается $<A,\vec{m}>$. Точка M принадлежит прямой $<A,\vec{m}>$, если и только если вектор AM коллинеарен вектору $\vec{m}$, а в этом случае $AM=t\vec{m}$. Значит, прямая есть множество точек

$$<A,\vec{m}>=\{M \mid AM=t\vec{m}, t\in \mathbf{R}\}.$$

Оболочка $<\vec{m}>$ называется *линейным пространством прямой* $<A,\vec{m}>$ или *направлением* прямой, векторы из $<\vec{m}>$ называются *векторами прямой* $<A,\vec{m}>$. *Прямая является 1-мерным аффинным пространством – 1-мерным подпространством аффинного пространства.*

Справедливы следующие свойства.

2.1.1. СВОЙСТВО. *Если* $B\in <A,\vec{m}>$ *и* $\vec{p}\in <\vec{m}>$, $\vec{p}\neq\vec{o}$, *то* $<B,\vec{p}>=<A,\vec{m}>$. #

2.1.2. СВОЙСТВО. *Всякие две различные точки определяют единственную прямую*. # Если это точки A и B то имеется прямая $\langle A,AB\rangle$.

Прямые, имеющие общие ненулевые векторы, называются *параллельными*. Параллельны прямые $<A,\vec{m}>$ и $<B,\vec{m}>$.

2.1.3. СВОЙСТВО. *Через всякую точку* B *аффинного пространства проходит единственная прямая* $<B,\vec{m}>$, *параллельная прямой* $<A,\vec{m}>$. #

Прямая $<A,\vec{m}>$ описывается линейными параметрическими уравнениями

$$x^1 = m^1 t + a^1,\ x^2 = m^2 t + a^2, \ldots,\ x^n = m^n t + a^n,$$

где $A = (a^1, a^2, ..., a^n)$, $\vec{m} = (m^1, m^2, ..., m^n)$ и $M = (x^1, x^2, ..., x^n)$ – произвольная точка аффинного пространства. Всякие уравнения такого вида задают прямую.

2.2. ПЛОСКОСТИ. Аффинная плоскость определяется точкой и двумя неколлинеарными векторами. Обозначение такой плоскости, определяемой точкой A и векторами $\vec{m},\vec{p}$: $<A,\vec{m},\vec{p}>$. Точка M принадлежит плоскости $<A,\vec{m},\vec{p}>$, если и только если $AM = u\vec{m} + v\vec{p}, (u,v) \in \mathbf{R}^2$. Множество точек плоскости таково:

$$<A,\vec{m},\vec{p}> = \{M \mid AM = u\vec{m} + v\vec{p}, (u,v) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Оболочка $<\vec{m},\vec{p}>$ называется *линейным пространством плоскости* $<A,\vec{m},\vec{p}>$, векторы из $<\vec{m},\vec{p}>$ называются *векторами плоскости* $<A,\vec{m},\vec{p}>$. *Плоскость является 2-мерным аффинным пространством, 2-мерным подпространством аффинного пространства.*

Выполняются следующие свойства.

2.2.1. СВОЙСТВО. *Если* $B \in <A,\vec{m},\vec{p}>$; $\vec{r},\vec{s} \in <\vec{m},\vec{p}>$ *и векторы* $\vec{r},\vec{s}$ *не коллинеарны, то* $<B,\vec{r},\vec{s}> = <A,\vec{m},\vec{p}>$.#

2.2.2. СВОЙСТВО. *Всякие две прямые плоскости либо не имеют общих точек, либо имеют одну общую точку, либо совпадают.* #

2.2.3. СВОЙСТВО. *Если* $B \notin \langle A,\vec{m}\rangle$ *и* $\vec{c} \notin \langle\vec{m}\rangle$, *то в плоскости* $\langle A,\vec{m},\vec{c}\rangle$ *прямые* $<A,\vec{m}>$ *и* $\langle B,\vec{c}\rangle$ *имеют единственную общую точку.* #

2.2.4. СВОЙСТВО. *В плоскости* $\langle A,\vec{m},AB\rangle$ *существует единственная прямая* $\langle B,\vec{m}\rangle$, *не пересекающая прямой* $<A,\vec{m}>$. #

Плоскости, имеющие общее линейное пространство, называются *параллельными*. Параллельны плоскости $<A,\vec{m},\vec{p}>$ и $<B,\vec{m},\vec{p}>$.

2.2.5. СВОЙСТВО. *Через всякую точку аффинного пространства проходит единственная плоскость, параллельная данной плоскости.* #

2.2.6.СВОЙСТВО. *В 3-мерном аффинном пространстве непараллельные плоскости имеют общую прямую.* #

2.2.7. СВОЙСТВО. *Через всякую прямую и точку вне ее проходит единственная плоскость.* #

2.2.8. СВОЙСТВО. *Пусть* $<A,\vec{m},\vec{p}>$ *произвольная плоскость,* $B\in<A,\vec{m},\vec{p}>$, $\vec{q}\in<\vec{m},\vec{p}>$. *Прямая* $<B,\vec{q}>$ *аффинного пространства лежит в плоскости* $<A,\vec{m},\vec{p}>$. #

2.2.9. СВОЙСТВО. *Через всякую точку* C *плоскости, содержащей прямую* $<B,\vec{q}>$ *в плоскости проходит единственная прямая* $<C,\vec{q}>$, *параллельная прямой* $<B,\vec{q}>$. *Все остальные прямые* $<C,\vec{r}>$ *плоскости,* $\vec{r}\notin<\vec{q}>$, *пересекают прямую* $<C,\vec{q}>$. #

По взаимному расположению прямых *аффинная плоскость является параболической.*

Если $<A,\vec{m}>$ и $<B,\vec{m}>$ различные параллельные прямые аффинного пространства, то $AB=\vec{p}\notin<\vec{m}>$.

2.2.10. СВОЙСТВО. *Через всякие две различные параллельные прямые проходит единственная плоскость.* #

Для прямых $<A,\vec{m}>$ и $<B,\vec{m}>$ это плоскость $<A,\vec{m},AB>$.

Если прямая $<B,\vec{q}>$ не параллельна прямой $<A,\vec{m}>$, то эти прямые пересекаются при условии, что векторы $\vec{m},\vec{q},AB$ линейно зависимы; прямые скрещиваются, если векторы $\vec{m},\vec{q},AB$ линейно независимы. Существует плоскость $<A,\vec{m},\vec{q}>$, содержащая обе пересекающиеся прямые, и существуют плоскости $<C,\vec{m},\vec{q}>$, параллельная каждой из двух скрещивающихся прямых $<A,\vec{m}>$ и $<B,\vec{q}>$.

Если $A=(a^1,a^2,...,a^n)$, $\vec{m}=(m^1,m^2,...,m^n)$, $\vec{p}=(p^1,p^2,...,p^n)$ и $M=(x^1,x^2,...,x^n)$ любая точка аффинного пространства, то параметрические уравнения плоскости $<A,\vec{m},\vec{p}>$ таковы

$$x^1=m^1u+p^1v+a^1,\ x^2=m^2u+p^2v+a^2,\ldots,\ x^n=m^nu+p^nv+a^n;$$

уравнения линейны.

Пусть $\vec{m}_1,\vec{m}_1,...,\vec{m}_k$ линейно независимые векторы, $k<n$. Множество точек

$$<A,\vec{m}_1,\vec{m}_2,...,\vec{m}_n>=$$
$$=\{M\mid AM=u_1\vec{m}_1+u_2\vec{m}_2+...+u_k\vec{m}_k,(u_1,u_2,...,u_k)\in\mathbf{R}^k\}$$

называется k*-плоскостью* аффинного пространства. k-плоскость при $k=n-1$ называется *гиперплоскостью*. Свойства гиперплоскостей соединяют свойства прямых плоскости и плоскостей 3-мерного пространства. например, всякие две непараллельные гиперплоскости пересекаются, их пересечением является $(n-2)$-плоскость.

§ 3. Преобразования аффинного пространства

3.1. **ГРУППА**. На множестве Ω с элементами $\alpha, \beta, ..., \omega, ...$ задана *бинарная операция*, которую называем *сложением* и обозначаем $+$. Это означает, что для любых элементов $\alpha, \beta \in \Omega$ элемент $\alpha + \beta \in \Omega$. Операция $+$ есть отображение

$$+ : \Omega \times \Omega \to \Omega .$$

Требуется выполнение следующих аксиом:

(г.1) *операция* $+$ *ассоциативна*: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(г.2) *во множестве* Ω *существует элемент* ϑ, *что* $\omega + \vartheta = \omega$ *для всех* $\omega \in \Omega$. Элемент ϑ называется *нулевым*, он единственный в Ω;

(г.3) *для всякого элемента* ω *в* Ω *существует элемент* υ, *что* $\omega + \upsilon = \vartheta$. Элемент υ называется *противоположным* для ω и обозначается $-\omega$. Пишем $\omega + (-\upsilon) = \omega - \upsilon$.

Множество Ω, на котором определена бинарная операция и выполняются аксиомы (г.1) - (г.3), называется *группой*. Обозначение группы: $\Omega = (\Omega, +)$ или $гр\Omega = (\Omega, +)$.

Если выполняется еще аксиома

(г.4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

то группа $(\Omega, +)$ называется *абелевой* (*коммутативной*).

3.2. **ГРУППА ЛИ**. Рассматривается дифференцируемое многообразие Ω вместе с дифференцируемым класса C^k отображением

$$\Omega \times \Omega \to \Omega ,$$

для которого выполняются аксиомы группы (г.1) – (г.3). Такое многообразие называется *группой Ли*.

3.3. **ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОЖЕСТВ**. Пусть $\mathbf{w}$ произвольное непустое множество, его элементы обозначаем $A, B, ..., M, ...$. *Взаимно однозначное отображение множества* $\mathbf{w}$ *самого на себя называется преобразованием множества* $\mathbf{w}$. Обозначаем преобразования: $\alpha, \beta, ..., \omega, ...$.

Преобразование ω множества $\mathbf{w}$ можно представить в виде множества пар элементов множества $\mathbf{w}$: если ω: $A \to B$ (A отображается на B в преобразовании ω), то $(A, B) \in \omega$. Множество пар ω обладает свойствами

(а) на первых местах в парах встречаются по одному разу все элементы множества $\mathbf{w}$;

(б) на вторых местах в парах встречаются по одному разу все элементы из множества $\mathbf{w}$;

(в) если $(A, B), (A, C) \in \omega$, то $B = C$;

(г) если $(A,B),(A,C) \in \omega$, то $A = C$.

Последовательное выполнение преобразований множества $\mathbf{W}$ называется их *композицией*, т.е. на множестве $S(\mathbf{W})$ всех преобразований множества $\mathbf{W}$ задана операция – композиция преобразований. *Композицию преобразований будем записывать в виде суммы*. Если $\alpha : A \to B$, то пишем $A\alpha = B$. В сумме преобразований $\alpha + \beta$ сначала выполняется преобразование α, затем преобразование β.

3.3.1. ТЕОРЕМА. *Множество* $S(\mathbf{W})$ *преобразований множества* $\mathbf{W}$ *является группой* $S(\mathbf{W})=(S(\mathbf{W}),+)$.

Множество $\mathbf{W}$ обладает тождественным преобразованием ϑ, состоящим из пар (A,A) для всех $A \in \mathbf{W}$. Если α произвольное преобразование и $(A,A') \in \alpha$, то $\alpha + \vartheta : A \to A' \to A'$, т.е. $A(\alpha + \vartheta) = A'$ и $\alpha + \vartheta = \vartheta + \alpha = \alpha$.

Для всякого преобразования α существует обратное. (Сохраняем этот термин для группы преобразований, употребляя его вместо термина противоположное преобразование.) Если преобразование α состоит из пар (A,A'), то преобразование $-\alpha$ состоит из пар (A',A). Имеем $\alpha + (-\alpha) : A \to A' \to A$, т.е. $\alpha + (-\alpha) = \vartheta$.

Композиция преобразований ассоциативна. #

В группе преобразований $S(\mathbf{W})$ могут существовать подгруппы преобразований – подмножества преобразований, также являющиеся группами относительно композиции преобразований.

3.4. **АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**. Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$ два репера аффинного пространства $\mathbf{A}^n$. Преобразование α, отображающее всякую точку M, имеющую в репере $\mathbf{B}$ координаты $(x^1, x^2, ..., x^n)$, на точку M', имеющую координаты $(x^1, x^2, ..., x^n)$ в репере $\mathbf{B}'$, называется *аффинным преобразованием* аффинного пространства $\mathbf{A}^n$. Координаты точки M' в репере $\mathbf{B}$ обозначим $M' = (x'^1, x'^2, ..., x'^n)$. Выполняется $M\alpha = M'$. Формулы преобразования α в репере $\mathbf{B}$ имеют вид:

$$\begin{cases} x'^1 = a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_n^1 x^n + a^1, \\ x'^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_n^2 x^n + a^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'^n = a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + a_n^n x^n + a^n. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Коэффициенты $a_j^i \in \mathbf{R}$, они составляют матрицу $(a^i{}_j)$ аффинного преобразования, $\det(a_j^i) \neq 0$, это неособые матрицы. Формулы аффинного преобразования линейны. Матрица аффинного преобразования записывается так:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^1 & a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a^2 & a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n & a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix},$$

это, так называемая *галилеева* матрица. Всякая матрица такого вида определяет в репере $\mathbf{B}$ аффинное преобразование. Аффинные преобразования аффинного пространства рассматриваем в фиксированном репере $\mathbf{B}$, их можно задать в любом репере.

Аффинные преобразования аффинного пространства составляют группу относительно композиции преобразований. Она называется *аффинной группой* и обозначается $\mathrm{A}(\mathbf{A}^n)$. Понятно, что аффинная группа не совпадает с $S(\mathbf{A}^n)$ – группой всех преобразований аффинного пространства.

Композиции аффинных преобразований α и β соответствует произведение их матриц

$$\alpha+\beta \leftrightarrow BA.$$

Матрицы аффинных преобразований пространства $\mathbf{A}^n$ составляют дифференцируемое многообразие размерности $(n+1)n$, операция на этом многообразии есть умножение матриц. *Аффинная группа является группой Ли.*

Аффинные преобразования это *коллинеации* аффинного пространства: каждое из них всякую прямую отображает на прямую, плоскость на плоскость, k – плоскость на k – плоскость.

Аффинная группа богата подгруппами. Преобразования (3.4.1) при a^i=0 для всех i оставляют неподвижным начало репера. Эти преобразования составляют группу. Матрицы $(a\ \ )$ указанных преобразований составляют *полную линейную группу*, ее обозначение $GL(n,\mathbf{R})$. В аффинной группе $\mathrm{A}(\mathbf{A}^n)$ выделяется подгруппа преобразований, не изменяющих ориентации пространства. Определители преобразований этой группы положительны. Если в формулах (3.4.1) $a_i^i=1$ и $a_j^i=0$ при $i\neq j$, то получаем *параллельные переносы* аффинного пространства, они составляют подгруппу в аффинной группе. Матрица параллельного переноса такова

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ей соответствует вектор $(a^1,a^2,\dots,a^n)$. Т. е. Матрицы-векторы составляют n-мерное линейное пространство. Матрица

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}$$

соответствует аффинному преобразованию

$$x'^1 = kx^1, x'^2 = kx^2, \dots, x'^n = kx^n, \ k \neq 0, k \neq 1,$$

которое называется *гомотетией*. Такие матрицы называются *скалярными*. Преобразования

$$x'^1 = kx^1 + a^1, x'^2 = kx^2 + a^2, \dots, x'^n = kx^n + a^n$$

образуют группу гомотетий и параллельных переносов аффинного пространства. Эта группа называется *основной аффинной*. Матрицы этих преобразований

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^1 & k & 0 & \dots & 0 \\ a^2 & 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n & 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

3.5. **КОЛЛИНЕАЦИИ**. Существует другой подход к определению аффинного преобразования аффинного пространства; подход, эквивалентный рассмотренному.

Аффинным преобразованием аффинного пространства называется его коллинеация, т.е. преобразование, в котором всякие три коллинеарные точки (точки одной прямой) отображаются на три коллинеарные точки одной прямой. Следовательно, в аффинном преобразовании всякая прямая отображается на прямую, различные прямые отображаются на различные прямые.

Аффинное преобразование параллельный перенос отображает на параллельный перенос. Это означает следующее. Пусть параллельный перенос π отображает $A \to A_1$, $B \to B_1$ и аффинное преобразование α отображает $A \to A'$, $A_1 \to A_1'$, $B \to B'$, $B_1 \to B_1'$. Тогда пары точек (A', A_1'), (B', B_1') определяют один и тот параллельный перенос τ аффинного пространства. Здесь выполняется равенство: $\tau = -\alpha + \pi + \alpha$. Учитывая, что параллельный перенос аффинного пространства является вектором, приведенное утверждение можно сформулировать иначе: *аффинное преобразование вектор отображает на вектор*. Теперь легко получить определение аффинного преобразования, использованное выше, а из него следует определение в настоящем пункте.

3.6. **КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА**. Аксиоматика Г. Вейля задает преобразования аффинного пространства, которые называются *каноническими.*

(1) Пусть A, B точки; существует вектор $AB = \vec{a}$. Для любой точки M и вектора $\vec{a}$, по аксиоме (в.1), существует единственная точка N, что $MN = \vec{a}$. Для любой точки P и вектора $-\vec{a}$ существует точка H, что $PH = -\vec{a}$, по свойству 1.2.1, $HP = \vec{a}$. Таким образом, по паре точек (A, B) вектором $AB = \vec{a}$ определяется множество пар точек, обладающее свойствами (а) – (г), и, тем самым, определено каноническое преобразование аффинного пространства; обозначим это преобразование через τ_a.

Пусть $A\tau_a = B$ и $M\tau_a = N$, т.е. $AB = MN$. Прямые $< A, \vec{a} >$ и $< M, \vec{a} >$ параллельны. Выполняются равенства: $AB + BN = AN$ и $AM + MN = AN$, т.е. $AB + BN = AM + MN$, отсюда $AM = BN$, т.е. и прямые $< A, AM >$ и $< B, BN >$ параллельны. Это означает, что преобразование τ_a является *параллельным переносом* аффинного пространства. Значит, *смысл вектора AB из линейного пространства $\mathbf{L}^n$ аффинного пространства $\mathbf{A}^n$ для аффинного пространства $\mathbf{A}^n$ состоит в том, что* ***вектор есть параллельный перенос аффинного пространства,*** [6].

От каждой точки H аффинного пространства откладывается один и тот же вектор $\vec{a} = (a^1, a^2, ..., a^n)$. Пусть $H = (h^1, h^2, ..., h^n)$, $P = (p^1, p^2, ..., p^n)$, паре (H, P) соответствует вектор $\vec{a} = (a^1, a^2, ..., a^n)$, т.е. преобразование τ_a, в котором $P = H\tau_a$. Тогда

$$p^1 = h^1 + a^1,\ p^2 = h^2 + a^2,\ ...,\ p^n = h^n + a^n.$$

Если $M = (x^1, x^2, ..., x^n)$ и $M\tau_a = M'$, $M' = (x'^1, x'^2, ..., x'^n)$, то

$$x'^1 = x^1 + a^1,\ x'^2 = x^2 + a^2,\ ...,\ x'^n = x^n + a^n.$$

Преобразование τ_a есть множество пар точек (M, M'), удовлетворя.щих условию

$$MM' = \vec{a}.$$

Матрицу этого преобразования запишем в блочном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a^1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ a^2 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a^n & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & E \end{pmatrix}.$$

Сумма преобразований $\tau_a + \tau_b$ есть преобразование τ_{a+b},

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b + a & E \end{pmatrix},$$

и по аксиоме (В.2), τ_{a+b} соответствует этой сумме. Множество T всех преобразований τ_a, $\vec{a} \in \mathbf{L}^n$, составляет группу $(T, +)$, изоморфную группе

$$(\mathbf{L}^n,+).$$

(2) Зафиксируем точку A и число $k \neq 0$. Пусть M любая точка. Существует вектор $\vec{a} = AM$ и существует точка M', что $AM' = kAM$. Определено преобразование γ_A^k аффинного пространства, в котором $M \to M'$, точка A неподвижна и $M' \in < A, AM >$. Это *гомотетия* аффинного пространства с центром A и коэффициентом k – каноническое преобразование аффинного пространства $\mathbf{A}$.

Канонические преобразования, т.е. параллельные переносы и гомотетии аффинного пространства являются аффинными преобразованиями.

Гомотетия γ_A^k есть множество пар точек (M, M'), для которых $AM' = kAM$. Формулы гомотетии

$$x'^1 = kx^1, x'^2 = kx^2, ..., x'^n = kx^n, \ k \neq 0, k \neq 1,$$

матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & k & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Сумма гомотетий $\gamma + \gamma^m$ есть гомотетия γ_A^{km}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & km \end{pmatrix}.$$

Применим гомотетию γ_A^k к параллельному переносу τ_a:

(3.6.1) $$-\gamma_A^k + \tau_a + \gamma_A^k = \gamma_A^{\frac{1}{k}} + \tau_a + \gamma_A^k = k\,\tau_a = \tau_{ka},$$

или в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ka & E \end{pmatrix}.$$

Преобразования аффинного пространства τ_a и γ_A^k порождают группу $\mathbf{P} = \Gamma_A \mathrm{T}$, она состоит из аффинных преобразований вида $\tau + \gamma_A^k$, это гомотетии аффинного пространства, матрицы этих гомотетий

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & k \end{pmatrix}.$$

Сумма таких преобразований определяется матрицей

(3.6.2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a + kb & km \end{pmatrix}$$

и является преобразованием вида $\tau + \gamma_A^k$.

Тем самым, канонические преобразования аффинного пространства не составляют, но образуют группу $(\mathbf{P},+)$ относительно композиции преобразований – это группа параллельных переносов и гомотетий

разований – это группа параллельных переносов и гомотетий аффинного пространства – она называется ***основной аффинной группой***.

Согласно равенствам (3.5.1), подгруппа T параллельных переносов является инвариантной в группе канонических преобразований $\mathbf{P}$, более того, имеем полупрямую сумму $\mathbf{P} = \mathrm{T} \leftarrow \Gamma_A$. Равенства (3.6.1) определяют произведение параллельного переноса τ на число k. Определим произведение гомотетии на число

$$t\,\gamma_A^k = \gamma_A^{k'}.$$

Мы получили 1-мерное линейное пространство гомотетий $\Gamma_A = (\Gamma_A, +, \omega_R(+))$. Доказана

3.6.1. ТЕРЕМА. *Множество канонических преобразований аффинного пространства* $\mathbf{A}^n$ *является полупрямой суммой* $\mathbf{P} = \mathrm{T} \leftarrow \Gamma_A$ n*-мерного линейного пространства* T *параллельных переносов и 1-мерного линейного пространства гомотетий* Γ_A. #

Группа, на которой определена внешняя операция умножения на действительные числа, называется *одулем*. Более точно это понятие определено ниже, в п. 16.1. Линейное пространство является частным случаем одуля.

Матрица A аффинного преобразования (3.4.1), см. п. 3.4, имеет блочную запись

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & (a_{ij}) \end{pmatrix}.$$

Для композиции преобразований получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & (a_{ij}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & (b_{ij}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+(a_{ij})b & (a_{ij})(b_{ij}) \end{pmatrix}.$$

Вторая строка в полученном произведении имеет такой же вид, как и вторая строка в произведении (3.6.2). Поэтому группа $\mathbf{P} = \mathrm{T} \leftarrow \Gamma_A$ и аффинная группа имеют одинаковое строение, групповые операции похожи, но группы не изоморфны.

3.7. **МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ 2-МЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА**. Рассмотрим аффинные преобразования аффинной плоскости. Выберем некоторый репер плоскости и пусть аффинное преобразование α точку $M(x, y)$ отображает на точку $M'(x', y')$. Формулы преобразования α:

$$\begin{cases} x' = a_1^1 x + a_2^1 y + b^1, \\ y' = a_1^2 x + a_2^2 y + b^2. \end{cases}$$

Матрица преобразования α

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ b^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

содержит основной блок

$$a = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad \det a \neq 0,$$

который определяет вид преобразования. Матрица того же преобразования, рассмотренного в другом репере плоскости, такова

$$c^{-1}ac,$$

подобна матрице a, здесь c матрица замены базиса линейного пространства плоскости. Матрица a может иметь 0,1 или 2 собственных значений и поэтому эквивалентна одной из матриц

$$^{o}a = r\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad {}^{1}a = r\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^{2}a = r\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы представляют соответственно комплексные числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $i^2 = -1$, дуальные числа $z = r(1 + ih)$, $i^2 = 0$, двойные числа $z = r(ch\varphi + ish\varphi)$, $i^2 = 1$. Рассмотрим 2-мерные числа, модуль которых равен 1: $r = 1$. По умножению числа каждого вида составляют абелеву группу – это мультипликативные группы соответственно комплексных чисел $^{-1}\mathbf{C}^1$, дуальных чисел $^{0}\mathbf{C}^1$, двойных чисел $^{1}\mathbf{C}^1$. Указанные группы не содержат делителей нуля. Определим на этих группах внешние операции возведения в действительную степень:

$$z^t = \cos\varphi t + i\sin\varphi t, \quad z^t = 1 + iht, \quad z^t = ch\varphi t + ish\varphi t; \; t \in \mathbf{R}.$$

Для этой операции выполняются аксиомы (L.5) – (L.10) линейного пространства (п. 1.3) и мы имеем мультипликативные линейные пространства комплексных чисел ($^{-1}\mathbf{C}^1, \cdot, \omega_R(\cdot)$), дуальных чисел ($^{0}\mathbf{C}^1, \cdot, \omega_R(\cdot)$), двойных чисел ($^{1}\mathbf{C}^1, \cdot, \omega_R(\cdot)$), модуль которых равен 1, [8, 9]. Линейное пространство $^{-1}\mathbf{C}^1$ компактно, линейное пространство $^{1}\mathbf{C}^1$ некомпактно, это 2-мерные линейные пространства над полем $\mathbf{R}$, они не изоморфны, вопреки распространенному мнению, что линейные пространства одной размерности над одним полем изоморфны, см., например, [10], а также [11]. Преобразования, матрицы которых содержат основной блок вида ^{0}a, $r = 1$, являются движениями евклидовой плоскости; если содержат блок вида ^{1}a, $r = 1$, то являются движениями галилеевой плоскости; если содержат a, $r = 1$, то являются движениями псевдоевклидовой плоскости; причем, последние преобразования содержат и преобразования из основной аффинной группы, их матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^1 & k & 0 \\ b^2 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Глава 2.

Основные понятия евклидовой геометрии

§ 4. Пространства со скалярным произведением

4.1. **СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ**. Рассматривается линейное пространство $\mathbf{L}^n$ над полем $\mathbf{R}$ и задано отображение

$$\mu : \mathbf{L}^n \times \mathbf{L}^n \to \mathbf{R}\,.$$

В этом отображении каждой паре $(\vec{a},\vec{b})$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ставится в соответствие действительное число, обозначаемое $\vec{a}\vec{b}$

$$\mu : (\vec{a},\vec{b}) \to \vec{a}\vec{b}\,,$$

называемое *скалярным произведением векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если выполняются аксиомы

(с.1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;

(с.2) $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$;

(с.3) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

Линейное пространство $\mathbf{L}^n$ со скалярным произведением векторов называется *векторным* или *евклидовым пространством* и обозначается $\mathbf{V}^n$. В $\mathbf{V}^n$ выбираем базис $\mathbf{Б}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$, обозначим $\vec{a}=(a^1,a^2,...,a^n)$, $\vec{b}=(b^1,b^2,...,b^n)$. На основании аксиом скалярного произведения векторов получаем $\vec{a}\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a^i b^j \vec{e}_i \vec{e}_j$. Обозначим: $\vec{e}_i\vec{e}_j = g_{ij}$, тогда

$$\vec{a}\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} a^i b^j = g_{ij} a^i b^j\,.$$

Числа g_{ij} составляют симметричную *матрицу Грама* $G=(g_{ij})$, $g_{ij}=g_{ji}$. Таким образом, скалярное произведение векторов представлено симметрической билинейной формой. Скалярное произведение векторов из $\mathbf{V}^n$ записываем в виде

$$(\mathbf{V}^n, \mathbf{V}^n) = (g_{ij}).$$

Всякая симметрическая билинейная форма в некотором базисе определяет скалярное произведение векторов пространства $\mathbf{V}^n$. Заменяя базис векторного пространства, получаем, в некотором базисе, скалярное произведение векторов в виде произведения соответствующих координат

(4.1.1) $\vec{a}\vec{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + ... + a^pb^p - a^{p+1}b^{p+1} - ... - a^{p+q}b^{p+q}$,

$p>0,\ p+q\le n$. *Сигнатура* (p,q) скалярного произведения не зависит от выбора базиса. Число $d=n-p-q$ называется *дефектом* скалярного произведения векторов.

(1) Если $p=n$, то пространство $\mathbf{V}$ называется *евклидовым* или *собственно евклидовым*;

(2) если $p+q=n, q\ne 0,$ то пространство $\mathbf{V}$ называется *псевдоевклидовым индекса* q;

(3) если $0<d<n$, то $\mathbf{V}$ есть *пространство с дефектом* или *полуевклидово пространство дефекта* d.

Скалярное произведение векторов пространства $\mathbf{L}^n$ может быть задано в некотором базисе матрицей Грамма или равенством (4.1.1).

Векторы $\vec{a},\vec{b}$ называются *перпендикулярными* (*ортогональными*), если $\vec{a}\vec{b}=0$. Обозначение перпендикулярности векторов $\vec{a}\perp\vec{b}$.

4.2. **НОРМА ВЕКТОРОВ**. Если в скалярном произведении векторов сомножители совпадают, то имеется *скалярный квадрат вектора*

$$\mu:(\vec{a},\vec{a})\to\vec{a}^2.$$

В подходящем базисе пространства $\mathbf{V}$:

$$\vec{a}^2=(a^1)^2+(a^2)^2+\ldots+(a^p)^2-(a^{p+1})^2-\ldots-(a^{p+q})^2.$$

Нормой $\|\vec{a}\|$ вектора $\vec{a}$ называется

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+\ldots+(a^p)^2-(a^{p+1})^2-\ldots-(a^{p+q})^2}.$$

Этим на векторном пространстве $\mathbf{V}$ введена норма или *метрика*.

Норма векторов называется *евклидовой* при $n=p$. Она обладает свойствами

(1) число $\|\vec{a}\|$ является действительным неотрицательным для всякого $\vec{a}\in\mathbf{V}^n$, $\|\vec{a}\|$=0 если и только если $\vec{a}=\vec{o}$.

(2) $\|\vec{a}+\vec{b}\|\le\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$ – неравенство треугольника.

Вектор $\|\vec{a}\|$ называется *изотропным*, если $\vec{a}\ne\vec{o}$ и $\|\vec{a}\|$=0. Евклидово пространство не содержит изотропных векторов.

Норма векторов псевдоевклидова пространства называется *псевдоевклидовой* или *лоренцевой*. В псевдоевклидовом пространстве содержатся изотропные векторы, это ненулевые векторы со свойством $(a^1)^2+(a^2)^2+\ldots+(a^p)^2=(a^{p+1})^2+\ldots+(a^{p+q})^2$. Неравенство треугольника здесь не выполняется.

Для пространства с полуевклидовой нормой свойства (1) и (2) евклидовой нормы не выполняются.

Некоторые нормы на векторах рассмотрены немного подробнее ниже.

4.3. **ЕВКЛИДОВО (СОБСТВЕННО ЕВКЛИДОВО) СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ**. В n – мерном линейном пространстве $\mathbf{L}^n$, совпадающем с $\mathbf{R}^n$ рассматриваем векторы $\vec{a} = (a^1, a^2, ..., a^n)$ и $\vec{b} = (b^1, b^2, ..., b^n)$. В базисе, в котором заданы векторы, определим скалярное произведение векторов равенством

$$\vec{a}\vec{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + ... + a^n b^n .$$

Это скалярное произведение векторов сигнатуры $(n,0)$ дефекта 0. После введения скалярного произведения векторов линейное пространство $\mathbf{L}^n$ превратилось в векторное пространство $\mathbf{V}^n$. Согласно п. 4.2, оно называется *евклидовым* или *собственно евклидовым*.

Евклидов скалярный квадрат $\vec{x}^2$ вектора $\vec{x} = (x^1, x^2, ..., x^n)$ равен

$$\vec{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2 .$$

Свойства евклидова скалярного квадрата векторов:

(а) для всякого вектора $\vec{x}$ скалярный квадрат неотрицателен: $\vec{x}^2 \geq 0$; причем $\vec{x}^2 = 0$, если и только если $\vec{x} = \vec{o}$.

(б) для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ выполняется неравенство Коши-Буняковского

$$(\vec{x}\vec{y})^2 \leq \vec{x}^2 \, \vec{y}^2 .$$

Евклидовой нормой $\|\vec{x}\|$ вектора $\vec{x}$ называется

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}^2} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2} .$$

Свойство (б) превращается в

$$|\vec{x}\vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| .$$

На его основе определяется угол между векторами

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{x}\vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} .$$

Справедливо неравенство треугольника

$$\| \vec{x} + \vec{y} \| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

для произвольных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Равенство $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ выполняется, если и только если $\vec{x} \perp \vec{y}$.

4.4. **ПСЕВДОЕВКЛИДОВО СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ**. Рассматривается 4-мерное линейное пространство $\mathbf{L}^4$, совпадающее с $\mathbf{R}^4$, т.е. векторами являются четверки действительных чисел. Записываем векторы в виде

$$\vec{x} = (x, x^1, x^2, x^3) .$$

Псевдоевклидовым скалярным произведением $\vec{x}\,\vec{y}$ *векторов* $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется число

$$\vec{x}\,\vec{y} = xy - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 .$$

Это скалярное произведение векторов сигнатуры (1,3) дефекта 0, здесь одно слагаемое – первое, взято со своим знаком, остальные три слагаемых взято с противоположными знаками. Например, для векторов $\vec{a} = (-1,2,-3,1)$ и $\vec{b} = (1,1,1,-2)$ по определению имеем $\vec{a}\vec{b} = -1-2+3+2=2$.

После введения скалярного произведения векторов линейное пространство превратилось в векторное пространство. При таком определении скалярного произведения векторов, векторное пространство называется *псевдоевклидовым* сигнатуры (1,3); его обозначение $\mathbf{V}^4_{(1,3)}$.

Псевдоевклидов скалярный квадрат $\vec{x}^2$ вектора $\vec{x}$ равен

$$\vec{x}^2 = x^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 .$$

Свойства псевдоевклидова скалярного квадрата векторов:

(а) существуют векторы, скалярный квадрат которых положителен; например, векторы $(a,0,0,0)$;

(б) существуют векторы, скалярный квадрат которых отрицателен; например, векторы $(0,a,0,0)$;

(в) существуют ненулевые векторы, скалярный квадрат которых равен нулю; например, векторы $(a,0,a,0)$.

Ненулевые векторы, скалярный квадрат которых равен нулю, называется *изотропными* или *световыми*. Сумма изотропных векторов не всегда изотропный вектор, например $(a,a,0,0) + (b,0,b,0) = (a+b,a,b,0)$, здесь $(a+b)^2 - a^2 - b^2 \neq 0$. 1-мерная оболочка $\langle\vec{a}\rangle$ изотропного вектора состоит из изотропных векторов.

Векторы $(x,0,0,0)$ называются *времениподобными*, векторы $(0,x^1,x^2,x^3)$ называются *пространственноподобными*. Псевдоевклидов вектор распадается на времениподобную и пространственноподобную составляющие

$$(x,x^1,x^2,x^3) = (x,0,0,0) + (0,x^1,x^2,x^3).$$

Псевдоевклидово пространство является прямой суммой двух евклидовых пространств

$$\mathbf{V}^4_{(1,3)} = \mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^3,$$

первое слагаемое времениподобное, второе – пространственноподобное.

Псевдоевклидовой нормой $\|\vec{x}\|$ вектора $\vec{x}$ называется

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}^2} = \sqrt{x^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2} .$$

Согласно свойствам псевдоевклидова скалярного квадрата векторов, существуют векторы: (а) имеющие действительную норму, т.е. векторы, нормой которых являются положительные действительные числа; (б) имеющие мнимую норму; (в) ненулевые векторы, имеющие нулевую норму.

Неравенство треугольника в псевдоевклидовом пространстве не выполняется. Например, для векторов $\vec{a} = (a,a,0,0)$ и $\vec{a}_2 = (a,-a,0,0)$ при $a \neq 0$:

$\|\vec{a}_1\| = 0$, $\|\vec{a}_2\| = 0$; $\vec{a} + \vec{a}_2 = (2a,0,0,0)$ и $\|\vec{a}_1 + \vec{a}_2\| = 2|a| \neq 0$. Получаем $\|\vec{a}_1 + \vec{a}_2\| > \|\vec{a}_2\| + \|\vec{a}_2\|$.

Псевдоевклидово векторное пространство используется в теории относительности А. Эйнштейна.

4.5. **ГАЛИЛЕЕВО СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ**. На линейном пространстве $\mathbf{L}^n$ над $\mathbf{R}$ может быть введено и скалярное произведение векторов, отличное от рассмотренных выше, в п. 4.1.

Рассмотрим прямое разложение линейного пространства

$$\mathbf{L}^n = \mathbf{L}^1 + \mathbf{L}^{n-1},\ n > 1.$$

В каждом из пространств $\mathbf{L}^1$, $\mathbf{L}^{n-1}$ задано евклидово скалярное произведение векторов: $\vec{a}^o\vec{b}^o$ для $\vec{a}^o, \vec{b}^o \in \mathbf{L}^1$ и $\vec{a}^1\vec{b}^1$ для $\vec{a}^1, \vec{b}^1 \in \mathbf{L}^{n-1}$. Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{L}^n$, $\vec{a} = \vec{a}^o + \vec{a}^1$, $\vec{b} = \vec{b}^o + \vec{b}^1$. Скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ определим следующим образом:

$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}^o\vec{b}^o$, если $\vec{a}^o \neq \vec{o}$ или $\vec{b}^o \neq \vec{o}$ (по крайней мере один из векторов $\vec{a}^o, \vec{b}^o$ ненулевой);

$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}^1\vec{b}^1$, если $\vec{a}^o = \vec{b}^o = \vec{o}$ (оба вектора $\vec{a}^o, \vec{b}^o$ нулевые).

Определенное так скалярное произведение векторов пространства $\mathbf{L}^n$ называется *галилеевым*. Оно задается скалярными произведениями векторов в каждом из подпространств $\mathbf{L}^1$ и $\mathbf{L}^{n-1}$.

Если $\vec{u} \in \mathbf{L}^1$, $\vec{u} \neq \vec{o}$ и $\vec{v} \in \mathbf{L}^{n-1}$, то имеем векторы $\vec{x} = \vec{u} + \vec{o}$, $\vec{y} = \vec{o} + \vec{v}$ пространства $\mathbf{L}^n$. Согласно определению галилеева скалярного произведения

$$\vec{x}\vec{y} = (\vec{u} + \vec{o})(\vec{o} + \vec{v}) = 0,$$

но неизвестно, можно ли раскрывать скобки в произведении $(\vec{u} + \vec{o})(\vec{o} + \vec{v})$, это никак не оговорено в определении. Таким образом, *скалярное произведение векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ не определено*.

То же самое галилеево скалярное произведение векторов из $\mathbf{L}^n$ приведем в другой форме записи.

В записях векторов выделяется одна из координат, например, первая. Координаты векторов записываются в виде: $\vec{a} = (a, a^1, ..., a^{n-1})$, $\vec{b} = (b, b^1, ..., b^n)$. *Галилеевым скалярным произведением векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$\vec{a}\vec{b} = ab$, *если* $a \neq 0$, *или* $b \neq 0$;

$\vec{a}\vec{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + ... + a^{n-1}b^{n-1}$, *если* $a = b = 0$.

Векторное пространство с галилеевым скалярным произведением векторов называется *галилеевым пространством* и обозначается $\mathbf{V}_\Gamma^n$.

Векторы базиса галилеева пространства $\mathbf{V}_\Gamma^n$ обозначаем

$$\vec{e},\ \vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1}.$$

Определены скалярные произведения векторов $\vec{e}\vec{e} = 1$, $\vec{e}_i\vec{e}_j = g_{ij}$, $i, j = 1, ..., n-1$; не определены скалярные произведения векторов $\vec{e}, \vec{e}_i$. Галилеево скалярное

произведение векторов определено на пере $(\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^{n-1})$ подпространств $\mathbf{V}^1 = <\vec{e}>$ и $\mathbf{V}^{n-1} = <\vec{e}_1,...,\vec{e}_{n-1}>$ и не определено на векторах из $\mathbf{V}^n_\Gamma$, не вошедших в подпространства $\mathbf{V}^1$ и $\mathbf{V}^{n-1}$.

Это скалярное произведение векторов не задается матрицей Грама или равенством вида (4.1.1). Оно задается двумя матрицами Грама

$$(\mathbf{V}^n_\Gamma, \mathbf{V}^n_\Gamma) = ((g_{ij}), (g'_{ij})); \text{ где } g_{11} = 1,\ g_{ij} = 0, i, j > 1;\ g_{ii} = 1,\ g_{ij} = 0, i \neq j;$$

и двумя равенствами вида (4.1.1): первое дефекта $n-1$, второе – дефекта 1.

По определению галилеева скалярного произведения на $\mathbf{V}^n_\Gamma$, на каждом из подпространств $\mathbf{V}^1 = <\vec{e}>$ и $\mathbf{V}^{n-1} = <\vec{e}_1,...,\vec{e}_{n-1}>$ задано собственно евклидово скалярное произведение векторов.

Галилеево скалярное произведение векторов тоже принято относить к евклидовым.

В книге В.И. Арнольда [12] по классической механике рассматривается галилеево векторное пространство и точечное галилеево пространство, построенное на основе аффинного пространства. Определена галилеева норма векторов и галилеево расстояние между точками, но не определено галилеево скалярное произведение векторов, как и во всех работах, где говорится о галилеевом расстоянии между точками. Галилеево скалярное произведение векторов определено в [13], но основа галилеева скалярного произведения выявлена выше, в настоящем пункте. И эта основа состоит в том, что галилеево скалярное произведение векторов задается двумя матрицами Грама, а не одной, как все другие евклидовы скалярные произведения векторов. Галилеево расстояние между точками определяется через скалярное произведение векторов.

В [12, с. 17] установлена *изотропность* галилеева пространства; изотропность понимается в смысле *однородности пространства*; в пространстве не выделяется никакого направления: свойства галилеева пространства во всех направлениях одинаковы. Имеется и другой смысл термина «*изотропность*»: вектор называется *изотропным*, если он не нулевой, но модуль его равен нулю (об этом в следующем пункте). *Отсутствие изотропных векторов в галилеевом пространстве* говорит об однородности этого пространства.

4.6. **ГАЛИЛЕЕВА НОРМА ВЕКТОРОВ**. Если в галилеевом скалярном произведении векторов $\vec{a} = \vec{b}$, то имеем *галилеев скалярный квадрат вектора*

$$\vec{a}^2 = a^2, \text{ если } a \neq 0;\ \vec{a}^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + ... + (a^{n-1})^2, \text{ если } a = 0.$$

Галилеевой нормой вектора $\vec{a}$ называется

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}^2};$$

$$\|\vec{a}\| = |a|, \text{ если } a \neq 0; \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + \ldots + (a^{n-1})^2}, \text{ если } a = 0.$$

Для галилеевой нормы выполняется свойство (1) из п. 3.2, *галилеево пространство не содержит изотропных векторов*. Неравенство треугольника для галилеева скалярного квадрата векторов не выполняется.

Вектор $\vec{a} = (a, a^1, \ldots, a^{n-1})$ галилеева пространства называется *галилеевым*, вектор $\vec{a} = (0, a^1, \ldots, a^{n-1})$ называется *евклидовым*. Евклидовы векторы составляют $(n-1)$-мерное собственноевклидово пространство $\mathbf{V}^{n-1}$. Всякий галилеев вектор перпендикулярен всякому евклидову вектору. Галилеево пространство $\mathbf{V}^n_\Gamma$ распадается в прямую сумму 1-мерного и $(n-1)$-мерного евклидовых пространств:

$$\mathbf{V}^n_\Gamma = \mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^{n-1}.$$

Евклидово пространство $\mathbf{V}^n$ имеет такое же разложение $\mathbf{V}^n = \mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^{n-1}$, но в галилеевом случае разложение инвариантно относительно галилеева скалярного произведения векторов п. 4.5, а в евклидовом случае – не инвариантно.

Всякий вектор $\vec{v}$ из $\mathbf{V}^n_\Gamma = \mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^{n-1}$ записывается в виде разложения

$$\vec{v} = \vec{t} + \vec{r} = t\vec{e} + r^1\vec{e}_1 + r^2\vec{e}_2 + \ldots + r^{n-1}\vec{e}_{n-1};$$

первое слагаемое $\vec{t}$ времениподобно, второе – пространственноподобно. Учитывая равномерность течения времени, можно считать, что для изменяющегося вектора $\vec{v} = \vec{v}(t)$ всегда времениподобная составляющая есть $\vec{t} = t\vec{e}$, где $\vec{e}$ задает масштаб измерения времени. Но возможно рассматривать и некоторую функцию времени, т.е. выбирать некоторые моменты времени через некоторые промежутки времени, не обязательно одинаковые. Этот выбор может быть дискретным или непрерывным. Например, в физике такой прием не используется в описании движений реальных объектов; но наблюдения за объектами можно вести в различных режимах времени. Размерность пространственноподобной составляющей не обязательна равна 3, в приложениях рассматриваются и другие размерности, см., например, [12, с. 26 и далее].

4.7. **НОРМА (МЕТРИКА) НА МНОЖЕСТВЕ**. На произвольном множестве $\mathbf{M}$ *действительная норма* (*метрика*) определяется заданием отображения

$$\mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{R}$$

с указанием его свойств, [14]. Еще до недавнего времени под нормой понималась только евклидова норма или близкая к ней, т.е. метрики со свойствами, обобщающими (1) и (2) из п. 4.2; сейчас отношение к этому понятию изменилось. На множествах (возможно с некоторой структурой – алгебраической, геометрической и др.) рассматриваются нормы с различными свойствами: евклидовы нормы, псевдоевклидовы, галилеевы и другие.

Известен большой класс римановых метрик, по свойствам близким к евклидовой метрике.

§ 5. Векторные функции.

5.1. **ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ**. Отображение класса C^k числового интервала $\mathbf{I}$ в векторное пространство $\mathbf{V}^n$ называется *векторной функцией* класса C^k одного параметра, векторная функция имеет вид

$$\vec{r}(t) = (x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)), t \in \mathbf{I}.$$

Всякий упорядоченный набор функций $x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)$ с общей областью определения $\mathbf{I}$ определяет векторную функцию $\vec{r}(t) = (x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t))$ в векторном пространстве $\mathbf{V}^n$. В галилеевом пространстве векторную функцию записываем в виде:

$$\vec{r}(t) = (x(t), x^1(t), ..., x^{n-1}(t)), \ t \in \mathbf{I}.$$

Аналогично определяются векторные функции двух и более параметров. В частности, векторная функция двух параметров есть:

$$\vec{r}(u,v) = (x^1(u,v), x^2(u,v), ..., x^n(u,v)), \ (u,v) \in \mathbf{D},$$

где $\mathbf{D}$ область евклидовой плоскости.

5.2. **ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ**. Во всех евклидовых пространствах, в том числе и галилеевом, предел векторной функции можно определить равенством

$$\vec{a} = \lim_{t \to t_o} \vec{r}(t) = (\lim_{t \to t_o} x^1(t), \lim_{t \to t_o} x^2(t), ..., \lim_{t \to t_o} x^n(t)).$$

В собственно евклидовом пространстве возможно и другое определение: вектор $\vec{a}$ называется пределом вектора $\vec{r}(t)$ в точке t_o, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что как только $|t - t_o| < \delta$, выполняется неравенство $|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$. Из этого определения предела в собственно евклидовом пространстве следует предыдущее определение. В других рассматриваемых векторных пространствах это неверно.

Обе линейные операции над векторами позволяют распространить на векторные функции определение производной функции $y' = f'(x)$ для функции $y = f(x)$, где $x, y \in \mathbf{R}$. Вектор $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\Delta\vec{r}$ получается в результате двух операций: $\Delta\vec{r}$ есть разность $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$, и производится умножение вектора $\Delta\vec{r}$ на число $\frac{1}{\Delta t}$. Во всех рассматриваемых векторных пространствах определяем

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Delta\vec{r},$$

предел вектора $\frac{1}{\Delta t}\Delta\vec{r}$ вычисляется покомпонентно.

Для функций нескольких параметров аналогично определяются частные производные $\vec{r}_u = \frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial u}$, $\vec{r}_v = \frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial v}$; а также производные высших порядков. Оказывается, что совпадают смешанные частные производные

$$\frac{\partial^2\vec{r}(u,v)}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\vec{r}(u,v)}{\partial v\partial u}, \text{ т.е. } \vec{r}_{uv}=\vec{r}_{vu},$$

и вообще результат дифференцирования по различным параметрам не зависит от порядка нахождения производных по этим параметрам.

§ 6. Евклидовы точечные пространства

6.1. **ПОЛУЧЕНИЕ ЕВКЛИДОВЫХ ТОЧЕЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ**. В линейном пространстве $\mathbf{L}^n$ аффинного пространства $\mathbf{A}^n$ может быть введено скалярное произведение векторов. Аффинное пространство $\mathbf{A}^n$ при этом превращается в евклидово пространство; получается собственно евклидово пространство $\mathbf{E}^n$, псевдоевклидово пространство $\mathbf{E}^n_q$ и т.д.; галилеево пространство Γ^n. Расстояние между точками $|AB|$ определяется через скалярный квадрат вектора

$$|AB|=\sqrt{AB^2}\ .$$

Прямые, плоскости, k – плоскости аффинного пространства становятся прямыми, плоскостями, k – плоскостями евклидовых пространств. В псевдоевклидовых пространствах существуют *изотропные прямые*, расстояния между любыми точками которых равны нулю. В псевдоевклидовом, галилеевом пространствах существуют собственно евклидовы плоскости, k – плоскости.

Коллинеации аффинного пространства являются коллинеациями евклидовых пространств. Среди них выделяются движения – коллинеации, сохраняющие расстояния между точками. Определители движений евклидовых пространств равны 1. Движения собственно евклидова, псевдоевклидова, галилеева пространств имеют матрицы, основные блоки которых есть ${}^{o}a$, ${}^{1}a$, ${}^{2}a$, п. 3.7. Значит, группы движений этих плоскостей содержат подгруппы движений с неподвижной точкой, на которых определяются мультипликативные линейные пространства, п. 3.7. А группы движений являются двухступенно разрешимыми группами – расширениями групп ${}^{-1}\mathbf{C}^1$, ${}^{0}\mathbf{C}^1$, ${}^{1}\mathbf{C}^1$ группой параллельных переносов прямой.

6.2. **СОБСТВЕННО ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО**. Рассматривается аффинное пространство $\mathbf{A}^3$ в линейном пространстве $\mathbf{L}^3$ которого определено евклидово (точнее – собственно евклидово) скалярное произведение векторов. Тем самым, мы имеем евклидово (собственно евклидово) пространство, оно обозначается $\mathbf{E}^3$. Все понятия аффинного пространства становятся понятиями евклидова пространства. В частности, в евклидовом пространстве мы имеем прямые, плоскости, коллинеации, реперы и т.д. Взаимное расположение прямых и плоскостей в евклидовом пространстве осталось таким же, как в аффинном пространстве, см. пп. 2.1 и 2.2, но добавились метрические свойства, т.е. свойства, связанные с возможностью измерять расстояния между точками и углы между линиями. Из реперов аффинного пространства выделяются те, которые имеют еще и метрическую характеризацию.

Пусть $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ репер евклидова пространства, являющийся репером аффинного пространства, это аффинный репер евклидова пространства. Считаем, что векторы репера удовлетворяют условиям

(а) длины векторов равны единице: $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$;

(б) углы между всякими двумя векторами равны $\frac{\pi}{2}$: $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$.

Такой репер называется *ортонормированным*. Обозначение ортонормированного репера $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Существуют процедуры, они изучаются в алгебре векторных пространств, позволяющие переходить от всякого аффинного репера к ортонормированному. Далее в $\mathbf{E}^3$ рассматриваются ортонормированные реперы.

Скалярное произведение векторов $\vec{x} = (x^1,x^2,x^3)$, $\vec{y} = (y^1,y^2,y^3)$ определяем равенством, п. 4.3,

$$\vec{x}\,\vec{y} = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3,$$

скалярный квадрат вектора $\vec{x}$ равен

$$\vec{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

и длина вектора $\vec{x}$ есть

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\,.$$

Вектор векторного произведения $\vec{x}\times\vec{y}$ векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ перпендикулярен векторам сомножителям, $\vec{y}\times\vec{x} = -\vec{x}\times\vec{y}$ и

$$\vec{x}\times\vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}.$$

Тройка векторов $\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}$ является правой. Векторы $\vec{x},\vec{y}$ коллинеарны (линейно зависимы), если и только если $\vec{x}\times\vec{y} = \vec{o}$. Выполняется $\|\vec{x}\times\vec{y}\| =$

$=\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\sin\alpha$, где α угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}, \vec{y}$, равна $\|\vec{x}\times\vec{y}\|$.

Смешанное произведение $\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z} = (\vec{x}\times\vec{y})\vec{z}$ векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ равно

$$\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}.$$

Выполняются свойства:

$$\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z} = \vec{z}\ \vec{x}\ \vec{y} = \vec{y}\ \vec{z}\ \vec{x},\ \vec{y}\ \vec{x}\ \vec{z} = -\vec{y}\ \vec{x}\ \vec{z}.$$

Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны (линейно зависимы), если и только если верно $\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z} = 0$. Если векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ составляют правую тройку, то $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} > 0$. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, равен $|\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}|$.

Если $A = (a^1, a^2, a^3)$ и $B = (b^1, b^2, b^3)$ точки из $\mathbf{E}^3$, то, как известно, п.1.6, координаты вектора AB таковы

$$AB = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b^3 - a^3).$$

Расстоянием $|AB|$ между точками A и B называется $|AB| = \sqrt{AB^2}$;

$$|AB| = \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2 + (b^3 - a^3)^2}.$$

Пусть $C = (c^1, c^2, c^3)$ еще одна точка. Величину угла α между прямыми AB и AC можно найти как угол между векторами AB и AC:

$$\cos\alpha = \frac{(b^1 - a^1)(c^1 - a^1) + (b^2 - a^2)(c^2 - a^2) + (b^3 - a^3)(c^3 - a^3)}{\sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2 + (b^3 - a^3)^2}\sqrt{(c^1 - a^1)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (c^3 - a^3)^2}}.$$

Площадь ΔABC равна

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} b^2 - a^2 & b^3 - a^3 \\ c^2 - a^2 & c^3 - a^3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b^1 - a^1 & b^3 - a^3 \\ c^1 - a^1 & c^3 - a^3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b^1 - a^1 & b^2 - a^2 \\ c^1 - a^1 & c^2 - a^2 \end{vmatrix}^2}.$$

Объём параллелепипеда с диагональю AD', если $D = (d^1, d^2, d^3)$, равен смешанному произведению векторов $V = AB\ AC\ AD$, или в координатах:

$$V = \begin{vmatrix} b^1 - a^1 & b^2 - a^2 & b^3 - a^3 \\ c^1 - a^1 & c^2 - a^2 & c^3 - a^3 \\ d^1 - a^1 & d^2 - a^2 & d^3 - a^3 \end{vmatrix}.$$

Прямая на плоскости определяется точкой $P(x_0, y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n} = (A, B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Три точки A, B, C коллинеарны (лежат на одной прямой), если и только если $AC = tAB$, для коллинеарных точек плоскости выполняется условие

$$\frac{c^1 - a^1}{b^1 - a^1} = \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2},$$

для коллинеарных точек пространства выполняется

$$\frac{c^1-a^1}{b^1-a^1}=\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2}=\frac{c^3-a^3}{b^3-a^3}.$$

Четыре точки A,B,C,D компланарны (лежат в одной плоскости), если и только если смешанное произведение векторов AB, AC, AD равно нулю

$$\begin{vmatrix} b^1-a^1 & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c^1-a^1 & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ d^1-a^1 & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix}=0.$$

Через точку $P(x_0,y_0,z_0)$ нормально вектору $\vec{n}=(A,B,C)$ проходит единственная плоскость

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

она нормальна прямой

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}.$$

Если плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ не параллельны, т.е. их нормальные векторы $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ не коллинеарны $\vec{n}_2\neq t\vec{m}_1$, и P их общая точка, линия пересечения плоскостей описывается уравнениями

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & A_2 \end{vmatrix}},$$

и перпендикулярная данным плоскостям плоскость есть

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}(z-z_0)=0.$$

Движением евклидова пространства называется его преобразование, в котором расстояния между точками инвариантны. Если в движении δ: $A\to A', B\to B'$, то $|A'B'|=|AB|$. Принято говорить, что движение сохраняет расстояния между точками. Точки A,B,C прямой обладают свойством: $|AB|+|BC|=|AC|$. Отсюда следует: в движении прямая отображается на прямую, различные прямые отображаются на различные прямые. Следовательно, движение является коллинеацией евклидова пространства. Верно и обратное утверждение – коллинеация евклидова пространства, в которой сохраняются расстояния между точками, является его движением. Евклидово пространство является аффинным пространством, удовлетворяющем дополнительным условиям. Движения евклидова пространства можно определить как его аффинные коллинеации, сохраняющие расстояния между точками. Поэтому движение отображает ортонормированный репер евклидова пространства на ортонормированный репер. Если заданы репер $\mathbf{P}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ и движение δ и δ: $O\to O'$, $\vec{i}\to\vec{i}'$, $\vec{j}\to\vec{j}'$, $\vec{k}\to\vec{k}'$, то $\mathbf{P}'=(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ –

ортонормированный репер евклидова пространства. Пусть $M=(x,y,z)$ произвольная точка, заданная в репере $\mathbf{P}$ и $M\delta=M'$. Тогда в репере $\mathbf{P}'$ точка M' имеет те же координаты, как точка M в репере $\mathbf{P}$, т.е. в репере $\mathbf{P}'$: $M'=(x,y,z)$.

Теперь зададим два ортормированных репера евклидова пространства $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ и отображение δ, в котором точке *M*, имеющей координаты (x,y,z) в репере $\mathbf{P}$ соответствует точка M', имеющая координаты (x,y,z) в репере $\mathbf{P}'$. Отображение δ сохраняет координаты точек. Оно является движением евклидова пространства.

Обозначим координаты точки M' в репере $\mathbf{P}$ через (x',y',z'). Координаты (x',y',z') образа M' точки $M=(x,y,z)$ в движении δ в репере $\mathbf{P}$ выражаются через x,y,z формулами

$$\begin{cases} x'=a_1^1x+a_2^1y+a_3^1z+c^1, \\ y'=a_1^2x+a_2^2y+a_3^2z+c^2, \\ z'=a_1^3x+a_2^3y+a_3^3z+c^3; \end{cases}$$

определитель движения равен ± 1. Существуют ДР1 – движения рода 1, сохраняющие ориентацию пространства, их определители равны 1; и ДР2 – рода 2, изменяющие ориентацию пространства, их определители равны -1. ДР1 составляют группу, ДР2 – не составляют. Матрицы ДР1 составляют *специальную линейную группу*, обозначаемую $SL(n,\mathbf{R}\}$.

ДР1 плоскости: тождественное преобразование, параллельный перенос и поворот; в частности, центральная симметрия есть поворот на 90°; ДР2: осевая симметрия и скользящая симметрия. Формулы ДР1 и их матрицы:

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a, \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+b; \end{cases} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix};$$

формулы ДР2 и матрицы:

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha+a, \\ y'=x\sin\alpha-y\cos\alpha+b; \end{cases} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Матрицы движений плоскости *ортогональны*: скалярные квадраты строк и столбцов матриц равны 1, скалярные произведения разных строк и разных столбцов равны 0. Эти матрицы составляют *ортогональную группу* $O(2)$, матрицы ДР1 составляют *специальную ортогональную группу* $SO(2)$.

Матрица кругового поворота евклидовой плоскости не имеет собственных направлений, поэтому в повороте нет инвариантных направлений. Существуют гиперболические и параболические повороты евклидовой плоскости, не являющиеся евклидовыми движениями, но в этих преобразованиях определяются инвариантные направления на плоскости.

ДР1 пространства: тождественное преобразование, параллельный перенос, вращение вокруг прямой, в частности, симметрия относительно прямой есть поворот на 90^0, винтовое движение; ДР2: центральная симметрия, симметрия относительно плоскости, перенос вдоль плоскости в сумме с отражением от плоскости.

В дальнейшем мы немного подробнее изучим евклидову геометрию, рассмотрим кривые и поверхности и некоторые их свойства. Замечательные кривые можно получить как траектории точек в преобразованиях евклидова пространства. Многие поверхности оказываются составленными из траекторий преобразований. Такой подход открывает характерные свойства кривых и поверхностей. Полезно рассматривать преобразования евклидова пространства, обладающие замечательными свойствами в других пространствах. Например, гиперболические повороты евклидова пространства, траектории точек в которых задают в псевдоевклидовом пространстве кривые постоянной кривизны.

6.3. **ПСЕВЛОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО**. В линейном пространстве $\mathbf{L}^4$ аффинного пространства $\mathbf{A}^4$ задается псевдоевклидово скалярное произведение векторов, получается псевдоевклидово векторное пространство $\mathbf{V}_1^4$. Пусть $(\vec{e},\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ базис псевдоевклидова пространства, в котором всякий вектор $\vec{x} = (x,x^1,x^2,x^3)$ имеет длину

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2}\,.$$

Векторы, для которых $x^2>(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$, имеют действительную длину. Выполняются: $\|\vec{e}\|=1$, $\|\vec{e}^1\|=i$, $\|\vec{e}^2\|=i$, $\|\vec{e}^3\|=i$, $i^2=-1$; все векторы базиса попарно взаимно перпендикулярны. Если $A=(a,a^1,a^2,a^3)$ и $B = (b,b^1,b^2,b^3)$ две точки псевдоевклидова пространства $\mathbf{E}_1^4$, то расстояние $|AB|$ между ними равно

$$|AB| = \sqrt{(b-a)^2-(b^1-a^1)^2-(b^2-a^2)^2-(b^3-a^3)^2}\,.$$

В псевдоевклидовом пространстве неравенство треугольника не выполняется. Имеется конус

$$x^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2,$$

на образующих которого расстояния между точками равны нулю. Этот конус называется *изотропным* или *световым*. Расстояния между точками внутри конуса являются положительными действительными числами, а между точками вне конуса являются мнимыми. Изотропный конус существует в каждой точке псевдоевклидова пространства $\mathbf{E}_1^4$, его ось параллельна координатной оси $Ox=\langle O,\vec{e}\rangle$, т.е. в каждой точке псевдоевклидова пространства существуют направления с действительными положительными направлениями. Пространство $\mathbf{E}_1^4$ есть *пространство-время специальной теории относительности А. Эйнштейна*, называемом еще *пространст-*

вом Г. Минковского. В различных системах отсчета в пространстве Минковского время течет с разными скоростями. Но скорость света постоянна. Это наиболее возможная скорость всевозможных движений. Движения псевдоевклидова пространства $\mathbf{E}_1^4$ называются еще *преобразованиями Г. Лоренца*. Движения пространства $\mathbf{E}_1^4$ – его преобразования, сохраняющие расстояния между точками. Движения плоскости $\langle O,\vec{e},\vec{e}_1\rangle$ в которых точка (t,x) отображается на точку (t',x'), записываются формулами

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{-\frac{v}{c^2}x + t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где c скорость света, v скорость движения репера $(O',\vec{e}',\vec{e}_1')$ относительно репера $(O,\vec{e},\vec{e}_1)$. Скорости движений складываются по особому правилу. Матрицы псевдоевклидовых движений могут быть записаны с использованием гиперболических функций, в частности

$$\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}.$$

Это матрица гиперболического поворота. Она имеет два собственных значения, которые определяют два инвариантных направления на псевдоевклидовой плоскости. Свойства псевдоевклидова пространства можно изучаются в [15 - 17].

6.4. **ГАЛИЛЕЕВО ПРОСТРАНСТВО**. Определяя в линейном пространстве $\mathbf{L}^4$ аффинного пространства $\mathbf{A}^4$ галилеево скалярное произведение векторов, п. 4.5, получаем пространство-время Галилея, его обозначение $\mathbf{\Gamma}^4$. Вектор $\vec{x} = (x, x^1, x^2, x^3)$ имеет норму, п. 4.6:

$$\|\vec{x}\| = |x|, \text{ если } x \neq 0; \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \text{ если } x = 0.$$

Галилеево векторное пространство $\mathbf{V}_{\vec{\Gamma}}$ является прямой суммой евклидовых пространств $\mathbf{V}_{\vec{\Gamma}} = \mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^3$. Вектор (x, x^1, x^2, x^3) при $x \neq 0$ называется галилеевым, вектор $(0, x^1, x^2, x^3)$ называется евклидовым, п. 4.6. Из евклидовых векторов состоит пространство $\mathbf{V}^3$. Всякий галилеев вектор перпендикулярен всякому евклидову вектору.

Расстояние между точками A и B по определению равно $|AB| = \sqrt{AB^2}$. Имеем

$$|AB| = |b-a|, \text{ если } b \neq a;$$

$$|AB| = \sqrt{(b^1-a^1)^2 + (b^2-a^2)^2 + (b^3-a^3)^2}, \text{ если } b = a.$$

Расстояния между точками (a, x^1, x^2, x^3) и (b, y^1, y^2, y^3), $b \neq a$, при любых x^i, y^i равны $|b-a|$. Но в пространстве Галилея нет изотропных направлений. Не-

равенство треугольника в пространстве Галилея не выполняется. Через всякую точку пространства $\mathbf{\Gamma}$ проходит единственное 3-мерное евклидово пространство.

Касательные векторы к линии в пространстве Галилея могут быть евклидовыми или галилеевыми. Если в некоторой точке P касательный вектор к линии является евклидовым, то в окрестности точки P эта линия лежит в евклидовом подпространстве пространства Галилея. Свойства такой линии изучаются евклидовой геометрией. В пространстве $\mathbf{\Gamma}$ интересно изучать линии в окрестности таких точек, в которых эти линии имеют галилеевы касательные векторы. Также интерес представляют поверхности, имеющие галилеевы касательные плоскости. С геометрией 3-мерного пространства Галилея можно познакомиться в [13, 18], геометрии галилеевой плоскости посвящена книга [19].

6.5. **ПОЛУЕВКЛИДОВА ПЛОСКОСТЬ**. Скалярное произведение векторов в общем случае определяется билинейной формой (4.1.1). Для 2-мерного пространства имеем

$$\vec{a}\vec{b} = ga^1b^1 + ha^2b^2,$$

где коэффициенты g, h принимают значения ± 1 или 0. Принципиально различны и значимы следующие возможности:

$$\vec{a}\vec{b} = a^1b^1 + a^2b^2, \quad \vec{a}\vec{b} = a^1b^1 - a^2b^2, \quad \vec{a}\vec{b} = a^2b^2.$$

В первом случае плоскость является евклидовой, во втором случае – псевдоевклидовой, в третьем – полуевклидовой. Галилеевой плоскости здесь не оказалось, т.к. галилеево скалярное произведение векторов задается парой билинейных форм на паре пространств ($\mathbf{L}^1$, $\mathbf{L}^1$), см. п. 4.5.

Если пространство $\mathbf{V}^2$ полуевклидово, его дефект $d = 1$, то векторы $(a^1, 0)$ изотропные, они определяют изотропное направление на полуевклидовой плоскости. Через каждую точку плоскости проходит единственная изотропная прямая. Другие свойства полуевклидовой плоскости см. в [16].

Увеличивая размерность аффинного пространства, в линейном пространстве которого задано скалярное произведение векторов, имеющее дефект $d \geq 1$, получаем пространства с неполным евклидовым скалярным произведением векторов с различными свойствами, в зависимости от значения дефекта d.

Содержание пп. 6.2 – 6.5 дает некоторое представление о разнообразии евклидовых пространств и их геометрий. Наиболее изученной является собственно евклидова геометрия. Началам дифференциальной геометрии евклидова пространства посвящено настоящее пособие. Рассматриваются некоторые начальные классические понятия и вопросы и классические ме-

тоды дифференциальной геометрии. Это связано с малым объемом курса геометрии.

§ 7. Многообразия.

Каждое из рассмотренных евклидовых пространств обладает одним замечательным свойством: координаты точек введены во всем пространстве заданием репера пространства. Рассмотрим обобщения евклидовых пространств, в которых координаты введены в окрестностях его точек; в разных окрестностях могут оказаться разные координаты.

7.1. **ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО**. Пусть $\mathbf{M}$ некоторое множество, U_1 его подмножество. Элементы множества $\mathbf{M}$ называются точками. Точка A называется *внутренней* точкой множества U_1, если в U_1 существует подмножество U_A, содержащее точку A. Множество U_1 называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней. Множество U_1, содержащее точку A, называется окрестностью точки A.

Пусть $T = \{U_\alpha\}$ система подмножеств множества $\mathbf{M}$, удовлетворяющая условиям:

(а) множество индексов $\{\alpha\}$ не более чем счетно;

(б) $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha = \mathbf{M}$;

(в) $\mathbf{M} \in T,\ \varnothing \in T$;

(г) $U_\alpha \cap U_\beta \subset T$;

(д) объединение любого числа множеств из T принадлежит T.

Система множеств T называется *покрытием* множества $\mathbf{M}$. Пара $(\mathbf{M}, T)$ называется *топологией* на множестве $\mathbf{M}$ или *топологическим пространством*. Разные системы множеств $\{U_\alpha\}$ задают на $\mathbf{M}$ разные топологии.

Топологическое пространство $(\mathbf{M}, T)$ называется *хаусдорфовым*, если для любых двух его точек в T существуют непересекающиеся подмножества, содержащие эти точки.

Отображение f множества $\mathbf{M}$ во множество $\mathbf{S}$ называется *непрерывным в точке* A множества $\mathbf{M}$, если для любой окрестности V точки $f(A)$ в $\mathbf{S}$ существует в $\mathbf{M}$ окрестность U, что $f(U) \subseteq V$. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке множества $\mathbf{M}$. Непрерывное отображение $f : \mathbf{M} \to \mathbf{S}$ называется *гомеоморфным*, если оба отображения f и $f^{-1} : \mathbf{S} \to \mathbf{M}$ непрерывны. В этом случае множества $\mathbf{M}$ и $\mathbf{S}$ называются *гомеоморфными*.

7.2. **МНОГООБРАЗИЕ**. Считаем, что на множестве $\mathbf{M}$ задано хаусдорфово топологическое пространство $(\mathbf{M},T)$, $T = \{U_\alpha\}$, $\bigcup_\alpha U_\alpha = \mathbf{M}$ и каждое множество U_α из T гомеоморфно отображается в $\mathbf{R}^n$. Под $\mathbf{R}^n$ понимается $n-$мерное евклидово пространство. $\mathbf{M}$ называется *многообразием* размерности n. Пусть U_α отображается в $\mathbf{R}^n$ гомеоморфизмом h_α. Каждой точке M из U_α соответствует точка $(x^1, x^2, ..., x^n)$ в $\mathbf{R}^n$. Набор чисел $(x^1, x^2, ..., x^n)$ называется *координатами* точки M. Пара (U_α, h_α) называется *локальной картой*. Множество всех локальных карт называется *атласом* многообразия $\mathbf{M}$. Расстояние между точками $M = (x^1, x^2, ..., x^n)$ и $N = (y^1, y^2, ..., y^n)$ множества $\mathbf{M}$ равно

$$|MN| = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + ... + (y^n - x^n)^2}\ .$$

Оно обладает всеми свойствами евклидова расстояния между точками.

Многообразие $\mathbf{M}$ называется *дифференцируемым*, если существует атлас, удовлетворяющий условиям:

(а) карты атласа покрывают множество $\mathbf{M}$;

(б) если для карт (U_α, h_α) и (U_β, h_β): $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ и $P \in U_\alpha \cap U_\beta$, то функции, выражающие координаты точки P в одной карте через координаты точки P в другой карте дифференцируемы и определитель замены координат отличен от нуля.

Подмножества в $\mathbf{R}^n$, на которые отображаются подмножества U_α, можно считать открытыми $n-$мерными параллелепипедами. Часто такие подмножества считаются открытыми $n-$мерными шарами. Параллелепипеды и шары гомеоморфны.

Говоря точнее, $\mathbf{M}$ называется *евклидовым многообразием*. Мы определяем ниже и другие многообразия.

7.3. **ПСЕВДОЕВКЛИДОВО МНОГООБРАЗИЕ**. Рассматривается множество $\mathbf{M}$ и хаусдорфово топологическое пространство $(\mathbf{M},T)$, $T = \{U_\alpha\}$, $U_\alpha \in \mathbf{M}$. На каждом множестве U_α задано гомеоморфное отображение h_α: $U_\alpha \to \mathbf{R}^4$ и имеется атлас карт (U_α, h_α). Всякая точка M из U_α в h_α отображается на точку (x, x^1, x^2, x^3) в $\mathbf{R}$. Точка M имеет координаты (x, x^1, x^2, x^3). Считаем, что в $\mathbf{R}$ определено псевдоевклидово расстояние между точками, тогда во множестве $\mathbf{M}$, если $M = (x, x^1, x^2, x^3)$ и $N = (y, y^1, y^2, y^3)$, то

$$|MN| = \sqrt{(y - x)^2 - (y^1 - x^1)^2 - (y^2 - x^2)^2 - (y^3 - x^3)^2}\ .$$

Многообразие $\mathbf{M}$ называется *псевдоевклидовым*. Открытые области в $\mathbf{R}$, на которые отображаются U_α из T, могут быть ограничены гиперплоскостями, параллельными координатным, гиперболоидами вида $(x - a)^2 - (x^1 - a^1)^2 - (x^2 - a^2)^2 - (x^3 - a^3)^2 = 1$; а могут быть ограничены только ко-

ординатными гиперплоскостями, т.е. состоять из внутренних точек 4-мерных параллелепипедов.

7.4. **ГАЛИЛЕЕВО МНОГООБРАЗИЕ**. Пусть $\mathbf{M}$ хаусдорфово топологическое пространство с заданными $T = \{U_\alpha\}$, $U_\alpha \in \mathbf{M}$. Считаем, что задано гомеоморфное отображение каждого открытого множества U_α из $\mathbf{M}$ во множество $\mathbf{R}^n$. На множестве $\mathbf{R}^n$ могут быть определены различные расстояния между точками – евклидово, псевдоевклидово, галилеево и другие. Считаем, что на $\mathbf{R}^n$ определена галилеева метрика.

В кортежах, составляющих $\mathbf{R}^n$, выделим первую компоненту и кортежи записываем в виде $X = (x, x^1, x^2, ..., x^{n-1})$. Пусть $Y = (y, y^1, y^2, ..., y^{n-1})$ еще одна точка. Галилеевым расстоянием $|XY|$ между точками X и Y называется

$$|XY| = |y - x|, \text{ если } y \neq x,$$

$$|XY| = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + ... + (y^{n-1} - x^{n-1})^2}, \text{ если } y = x.$$

Тем самым имеем *галилеево многообразие* $\mathbf{R}^n$.

Открытыми множествами $\mathbf{D}^2$ в $\mathbf{R}^2$ являются множества пар (x, x^1), где $a < x < b$, $a^1 < x^1 < b^1$ и (a, b), (a^1, b^1) интервалы из **R**. Открытые множества $\mathbf{D}^3$ в $\mathbf{R}^3$ есть множества троек (x, x^1, x^2), где $a < x < b$, $(x^1)^2 + (x^2)^2 < c^2$. Множество $\mathbf{D}$ есть внутренность цилиндра радиуса c и высоты $b - a$. Открытое множество $\mathbf{D}^n$ в $\mathbf{R}^n$ есть внутренность n-мерного цилиндра радиуса c и высоты $b - a$, для точек $(x, x^1, x^2, ..., x^{n-1})$ открытого цилиндра выполняются неравенства $a < x < b$, $(x^1)^2 + ... + (x^{n-1})^2 < c^2$.

Итак, для каждого открытого множества U_α, из хаусдорфова топологического пространства $\mathbf{M}$ задано гомеоморфное отображение h_α в галилеево многообразие $\mathbf{R}^n$. Тем самым, в пространстве $\mathbf{M}$ локально ведены координаты, в которых определено галилеево расстояние между точками. Имеем атлас $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$. Выполняются условия

(а) $\bigcup_\alpha U_\alpha = \mathbf{M}$,

(б) $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ класса C^k, как и h_α, h_β,

(в) семейство $\{U_\alpha\}$ максимально.

Теперь и хаусдорфово пространство $\mathbf{M}$ является *галилеевым многообразием*.